群

1. 二元运算

定义：集合 S 上的一个二元运算是映射 $S\times S \longrightarrow S$

其中 $S\times S$ 是笛卡尔积

注 1：通常用 $a\circ b$ 或者 ab 抽像表示元素 a 和 b 的运算结果

2：结合律：$(ab)c = a(bc)$

3，交换律：$ab = ba$

4 如果 S 只有有限个元素，可以绘出乘法表

例1：实数上的 $+$，$\times$（结合，交换）

2、方阵上的矩阵乘法（结合）

3、线性空间中向量的加法（结合，交换）

4、函数的复合（结合）

定义：S 中的元素 e 是恒等元，如果 $ea=ae=a$，$\forall a\in S$

定义：S 中的元素 a 是可逆的，如果 $\exists\, b\in S$，s.t $ab=ba=e$

注：$a^m = \underbrace{a\circ a\cdots a}_{m个}$ $\quad a^{-m} = \underbrace{(a^{-1})\circ\cdots\circ(a^{-1})}_{m个}$ $\quad m\in\mathbb{Z}_{>0}$

2、群与子群

定义：群是有二元运算并满足下面性质的集合 G

- 结合律：$(ab)c = a(bc)$，$\forall a,b,c\in G$
- 单位元 e（或者 1）：$1a=a1=a$ $\quad\forall a\in G$
- 逆：$\forall a\in G$，$\exists a^{-1}$，s.t $a^{-1}a=aa^{-1}=1$

注 1：二元运算的定义告诉我们运算在 G 上封闭

2. 如果运算也是交换的，G 是交换群或阿贝尔群

定义：群的阶 $= |G| =$ G 的元素个数（有限群、无限群）

例：1 $(\mathbb{Z}, +)$ 整数加群

$(\mathbb{R}, +)$ 实数加群

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \times)$ 非零实数乘法群 $\}\ \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$

2. 一般线性群 $GL(n)$：所有 $n\times n$ 可逆矩阵集合

$GL_n(\mathbb{R})$，$GL_n(\mathbb{C})$

命题（消去律）：$a, b, c \in G$，1) $ab=ac \Rightarrow b=c$

2) $ba=ca \Rightarrow b=c$ 3) $ba=a$ 或 $ab=a \Rightarrow b=1$

证明：左/右乘 a^{-1}

注：a^{-1} 存在很关键，如果 G 上的运算只是结合的，则 G 是一个半群。有单位元的半群又叫含幺半群

例：3 置换群：T 是一个有限集合，$\{f: T\to T, 可逆\}$ 在映射的复合下构成一个群，称为置换群

4. $T=\{1,2,3\cdots n\}$ 时，对应的置换群称为对称群 S_n

$|S_n| = n!$

5. $S_2 = \{1, p\}$ $\quad 1 = id: \{1,2\} \longrightarrow \{1,2\}$

$p: \{1,2\} \longrightarrow \{1,2\}$：$p(1)=2$，$p(2)=1$

	1	p
1	1	p
p	p	1

S_2 是交换群

6. $S_3 = \{ f: \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \mid f \text{可逆} \}$ $|S_3| = 6$

可以直接写出所有元素

也可以：定义 $x = (1\,2\,3)$，或者说 $x(1)=2$，$x(2)=3$，$x(3)=1$

$y = (1\,2)$，$y(1)=2$，$y(2)=1$，$y(3)=3$

可以证明 $x^3=1$，$y^2=1$，$yx = x^2 y$

$\Rightarrow$ 只有 $\{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ 是不同的，S_3 的元素

x, y, x^{-1}, y^{-1} 的任意积都能化成以上6个元素

S_3 不交换，$xy \neq yx$

（$yx = x^2y$ 且 $yx = xy \Rightarrow x^2y = xy \Rightarrow x=1$，矛盾）

* 1. $S_3 = \{x, y \mid x^3=1, y^2=1, yx = x^2y\}$

2. x, y 叫作生成元，群中所有元素都能写成生成元的积。因为生成元之间的关系，不同的积可能相等

3. 生成元 + 关系叫作一个群的表现 (presentation)，一个群的表现不唯一

定义（子群）：$H \subset G$ 是 G 的子群，如果 H 满足：

- 封闭性：$\forall a, b \in H$，s.t $ab \in H$
- 恒等元：$1 \in H$
- 逆元：$\forall a \in H$，s.t $a^{-1} \in H$

例：1. 圆群：$(\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}, \times) \subset (\mathbb{C}\setminus\{0\}, \times)$

2. 特殊线性群 $SL_n(\mathbb{R})$：所有行列式为 1 的 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{matrix} SL_n(\mathbb{R}) \\ \cap \\ GL_n(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

※ $\{1\}$ 和 G 是 G 的子群，其它子群叫作真子群

定义（循环群）：$\mathbb{Z}_n = \{1, x, \cdots x^{n-1} \mid x^n = 1\}$

生成元 x ， 关系 $x^n=1$ $\qquad |\mathbb{Z}_n| = n$

※ $S_3 = \{x, y \mid x^3=1, y^2=1, yx = x^2y\}$ 有两个子群是循环群：(1) $\{x^k \mid x^3=1\} = \mathbb{Z}_3$ (2) $\{y^k \mid y^2=1\} = \mathbb{Z}_2$

3. 群同态

定义（群同态）：G, G' 是群，映射 $\varphi: G \longrightarrow G'$ 是群同态

如果 φ 满足：$\forall a,b\in G$ ， $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

※ 也叫映射 φ 和群上的乘法相容

命题：$\varphi: G \longrightarrow G'$ 是群同态

(1) $\varphi(1_G) = 1_{G'}$ $\qquad$ (2) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

证明：(1) $\varphi(1_G) = \varphi(1_G\circ 1_G) = \varphi(1_G)\circ\varphi(1_G)$

再用消去律 $\Rightarrow$ $\varphi(1_G) = 1_{G'}$

(2) $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(1_G) = 1_{G'}$

$\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ $\qquad \square$

例：线性空间和 + 构成一个群，线性映射都是群同态

定义(像)：群同态 $\varphi: G \longrightarrow G'$ 的像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 定义为

$$\mathrm{im}\,\varphi = \{x \in G' \mid \exists\, a \in G,\ \varphi(a) = x\}$$

定义(核)：群同态 $\varphi: G \longrightarrow G'$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = 1\}$

命题：$\varphi: G \longrightarrow G'$ 是群同态，$\mathrm{im}\,\varphi$ 是 G' 的子群

$\mathrm{Ker}\,\varphi$ 是 G 的子群

※ 考虑线性空间在 + 下构成的群，此时线性映射作为群同态的像与核同之前线性映射的像与核相同

定义(左陪集)：H 是 G 的子群，a 是 G 的一个元素

$aH = \{g \in G \mid \exists\, h \in H,\ g = ah\}$ 是 H 在 G 中的一个左陪集

※ "左"因为 a 左乘 H 中的元素，同理可以定义右陪集

命题：$\varphi: G \to G'$ 群同态，$a, b \in G$，$K = \ker\varphi$ 以下命题等价

(1) $\varphi(a) = \varphi(b)$，(2) $a^{-1}b \in K$，(3) $b \in aK$，(4) $bK = aK$

证明：(1)⇒(2) $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow 1_{G'} = \varphi(a)^{-1}\varphi(b) = \varphi(a^{-1}b)$

$\Rightarrow a^{-1}b \in K$

(2)⇒(3) $a^{-1}b = h \in K \Rightarrow b = ah \Rightarrow b \in aK$

(3)⇒(4) $b \in aK \Rightarrow \exists\, h \in K,\ b = ah$

$\forall\, b' \in bK$，$b' = bh'$ 且 $h' \in K \Rightarrow b' = ahh'$

$h, h' \in K \Rightarrow hh' \in K$ (封闭) $\Rightarrow b' \in aK$

$bK \subset aK$

同理，又∵ $a = bh^{-1}$，可以证明 $aK \subset bK$

$\Rightarrow aK = bK$

(4) ⇒ (1) $aK = bK$ $\forall h \in K, \exists h' \in K$, s.t $ah = bh'$

$\Rightarrow \varphi(ah) = \varphi(bh') \Rightarrow \varphi(a)\varphi(h) = \varphi(b)\varphi(h')$

$\Rightarrow \varphi(a)\cdot 1_{G'} = \varphi(b)\cdot 1_{G'} \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ □

\# 1 群同态的核不仅告诉我们 G 中哪些元素映到 1，也告诉我们哪些元素的像相同

2. 上面的命题在线性方程组的应用就是 $Ax = b$ 的通解 = 特解 + $\{Ax = 0\}$ 的通解

推论：群同态 $\varphi: G \to G'$ 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{1\}$

定义（正规子群）：$N < G$ 是 G 的正规子群 如果 $\forall a \in N$, $\forall g \in G$，均有 $gag^{-1} \in N$

命题：$\varphi: G \to G'$ 群同态，$\operatorname{Ker}\varphi$ 是 G 的正规子群

定义（中心）：群 G 的中心 $Z_G = \{z \in G \mid zx = xz \ \forall x \in G\}$

Z_G 总是 G 的正规子群

例 1. $\det: GL_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \times)$ $\operatorname{Ker}\det = SL_n(\mathbb{R})$

$SL_n(\mathbb{R})$ is a normal subgroup of $GL_n(\mathbb{R})$

2. $Z_{SL_2(\mathbb{R})} = \{I, -I\}$

3. $Z_{S_n} = \{1\}$ $n \geq 3$

4. 群同构

定义(群同构)：群同态 $\varphi: G \to G'$ 是群同构如果 φ 是双射

例 1 $e^x: (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \times)$

2. $S_2 \longrightarrow \{I, \ I-2P\}$ $\quad P^2=P$ 投影矩阵

* 1 G, G' 是同构的，如果它们之间有一个群同构，也记作 $G \simeq G'$

2. 群到自己的同构 $\varphi: G \to G$ 也叫自同构(automorphism)

$id: G \to G$ 恒等映射是自同构

5. 等价关系

定义(等价关系) 集合 S 上的等价关系 $\sim$ 是 S 中两个元素间的关系。如果 a, b 有关系，记作 $a \sim b$。等价关系满足

- 传递性：$a \sim b, \ b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- 对称性：$a \sim b \Rightarrow b \sim c$
- 反身性：$a \sim a \quad \forall a$

* 1 等价关系可以看成"="的抽象

2. 等价关系可以理解成映射 $f: S \times S \to \{0, 1\}$

$$a \sim b \iff f(a,b) = 1$$

且 $f(a,b) = f(b,c) = 1 \Rightarrow f(a,c) = 1$

$f(a,b) = f(b,a), \quad f(a,a) = 1$

3. 关系的另一种理解方式是看成 $S\times S$ 的一个子集 R

等价关系 R 满足：$(a,b)\in R, (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$

$(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$，$(a,a)\in R$

4. 集合 S 上有一个等价关系，则 S 可以写成 $S=\bigcup_i S_i$，其中 S_i 内部的元素都等价，S_i 的元素和 S_j 的元素不等价。每一个 S_i 被称为一个等价类

例，1. "$=$" 是 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的等价关系

2. 矩阵行等价

3. 些方阵相似

4. 线性空间之间存在一一映射

5. 群同构

6. 同余：$a\equiv b \pmod p$

环、域

群是只有一种运算的集合，我们现在考虑两种运算的集合.

1. 环

定义(环)：环是一个有两种运算 $(+, \times)$ 的集合 R，并满足

- $(R, +)$ 是一个交换群(阿贝尔群)，单位元记做 0
- $(R, \times)$ 是含幺半群：结合，单位元记做 1
- 分配律：$\forall\, a, b, c \in R$，$(a+b)c = ab + bc$
  $c(a+b) = ca + cb$

*：1. $+$，$\times$ 代表抽像的运算，不只是狭义的加、乘法

2. 根据运算的定义，$+$，$\times$ 在 R 上自然是封闭的
3. 如果 R 上的 $\times$ 也是交换的，则 R 是交换环
4. $\forall\, a \in R$，$0 = 0a + (-(0a)) = (0 + (-0))a = 0a$
5. 环上有减法($+$ 的逆)，没有除法($\times$ 的逆)

例 1 (多项式环) $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{R}\}$

$+$：多项式加法，$\times$ 多项式乘法

$\mathbb{Z}[x]$，$\mathbb{Q}[x]$，$\mathbb{C}[x]$，$0 = 0$，$1 = 1$

2. 整数环 $\mathbb{Z}$　$+$，$\times$ 整数加、乘法　$0 = 0$，$1 = 1$
3. 连续实函数环　所有连续实函数构成一个环
   $+$，$\times$ 函数 $+$，$\times$，0：0 函数 $\mathbb{R} \to 0$
   1：值为 1 的常函数 $\mathbb{R} \to 1$
4. 高斯整数 $\mathbb{Z}[i]$ $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\}$，$+$ $\times$
   $0 = 0$　　$1 = 1$
5. 零环 $\{0\}$：$\{0\} \Leftrightarrow 1 = 0$ 的环

定义（子环）：R的子集Q是子环，如果Q在+下是R的子群，×在Q上封闭，$1\in Q$

例 1. $\{a_0 \mid a_0\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 的一个子环

2. 环同态和理想（ideal）

定义（环同态）：R, R' 是环，映射 $\varphi: R\to R'$ 是环同态，如果

- $\forall a, b\in R$，$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$　$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$
- $\varphi(1_R)=1_{R'}$

※ 同样可以定义像和核，$\operatorname{Ker}\varphi=\{a\in R \mid \varphi(a)=0\}$

定义（理想）：$I\subset R$，$I\neq\phi$，I是一个理想，如果

- I在+下封闭
- $\forall s\in I$，$r\in R$，s.t $rs\in I$

※ 1 等价描述，$I\neq\phi$，$\forall\{s_i\in I\}\{r_i\in R\}$，$r_1s_1+\cdots+r_ks_i\in I$

2. $a\in R$，集合 $\{ra \mid \forall r\in R\}$ 是一个理想，叫作a生成的主理想

例 1. $\varphi: R\to R'$ 环同态，$\operatorname{Ker}\varphi$ 是R的理想

2. p是一个素数，$\{np \mid \forall n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的由p生成的主理想

3. $\{0\}$ 是R的理想

4. $\{1\}$ 生成的主理想是R本身

3、域

定义（域）域是一个有两种运算 $(+,\times)$ 的集合 F，且满足

- $(F,+)$ 是交换群，单位元记作 0
- $(F\setminus\{0\},\times)$ 是交换群，单位元记作 1
- 分配律：$\forall a,b,c\in F$，$a(b+c)=ab+ac$

注 1. 域是一个交换除环

2. $+,\times$ 在域上自然封闭

引理（整个域 F 上的乘法）F 是域，则

(a) $0\neq 1$，(b) $\forall a\in F$，$0a=0=a0$

(c) $\forall a,b,c\in F$，$(ab)c=a(bc)$，1 是 F 中乘法单位元

证明：(a) $1\in F\setminus\{0\}\Rightarrow 1\neq 0$

(b) $0+0=0\Rightarrow a0+a0=a(0+0)=a0$

又 $\because (F,+)$ 是群，由消去律 $\Rightarrow a0=0$，同理 $0a=0$

(c) $(F\setminus\{0\},\times)$ 是阿贝尔群，只需考虑 a,b,c 中有一个元素是 0 的情形，此时 $(ab)c=0=a(bc)$

$1\cdot 0=0\Rightarrow \forall a\in F$，$1a=a$

例 1. $\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$

2.（模 p 域）$\mathbb{Z}$ 不是域，但如果定义等价关系

$\sim$：$\{a\sim b \mid a\equiv b \pmod p\}$ 和

集合：$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{p-1}\}$，

$+$：$a+b \bmod p$，$\times$：$a\times b \bmod p$

换句话说，把 $\mathbb{Z}$ 中对 p 同余的元素看成一个元素

如果 p 是质数，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是一个域

$\mathbb{F}_p$ 是一个有限域，$a, b \in \mathbb{Z}$，$a = b \in \mathbb{F}_p \iff a \equiv b \pmod{p}$

3. 如果 p 不是质数，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 一般不是域

命题（消去律） p 是一个质数，$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{F}_p$

- $\bar{a}\bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = 0$，或 $\bar{b} = 0$
- $\vec{a} \neq \vec{0}$ 且 $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{c} \Rightarrow \bar{b} = \bar{c}$

推论 $Ax = b$ 是 $\mathbb{F}_p$ 中的线性方程组，$\delta = \det A$，$\delta \neq 0$

则 $Ax = b$ 有唯一解

例 1 $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $Ax = b$

$\det A = 42$，

如果 $p \neq 2, 3, 7$，则 $\det A \neq 0 \in \mathbb{F}_p$，有唯一解

$p = 13$，$\det A = 3$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \bmod 13$

$p = 2, 3$ 无解，$p = 7$，无穷多解

2. $GL_n(\mathbb{F}_n)$ $SL_n(\mathbb{F}_p)$

$GL_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$

定义 (域特征) 域 F 的**特征**是 $\min\{m\in\mathbb{Z}_{>0} \mid \underbrace{1+\cdots+1}_{m}=0\}$

* 如果 $\underbrace{1+\cdots+1}_{m}$ 永不为 0，则此域的特征定义为 0（不是 ∞）

例 1. $\mathbb{F}_p$ 的特征是 p（p 是质数）

2. $\mathbb{C}$ 的特征是 0

定理：p 是个质数，$(\mathbb{F}_p\setminus\{0\},\times)$ 是个 $p-1$ 阶循环群

例：$\mathbb{F}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$\mathbb{F}_7\setminus\{0\}=\{1,3,2,6,4,5\}=\{3^0,3^1,3^2,3^3,3^4,3^5,3^6\}$

定义 (一般域上的线性空间)

集合 V 是域 F 上的线性空间，如果它有 $+: V\times V\to V$ 和 $\cdot: F\times V\to V$，且

- $(V,+)$ 是交换群，单位元记为 0
- $1v=v$，$\forall v\in V$（1 是 F 的乘法单位元）
- $(ab)v=a(bv)$ $\forall a,b\in F$，$v\in V$
- $(a+b)v=av+bv$，$a(v+w)=av+aw$，$\forall a,b\in F$，$v\in V$

群表示

1. 洛伦兹变换：洛伦兹群作用在 $(ct, x, y, z)^T$ 上
2. 量子力学：系统用线性空间中的向量描述，研究对称性需要考虑群在向量空间的作用

1. 定义

我们这里只考虑 $GL_n = GL_n(\mathbb{C})$（复表示）

定义（矩阵表示） 群 G 的**矩阵表示**是 $R: G \to GL_n$ 的群同态

1. n 被称做表示的维数
2. $\forall\ g \in G$，$R_g = R(g)$ 是 g 在 GL_n 中的像，R_g 可逆矩阵
   群同态：$R_{gh} = R_g R_h$
3. $R: G \to GL_n$ 是单射，则 R 是**忠实的**
4. $R_{1_G} = I_n$

例：$S_3 = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, yx = x^2y\}$

二维表示 A：
$$A_x = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \qquad A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 　　　　关于 e_1 轴反射

这个表示是忠实的

一维表示 Σ：$\Sigma_x = 1$ 　 $\Sigma_y = -1$. 　不是忠实的

平凡表示 T 　 $T_x = 1$ 　 $T_y = 1$

S_3 的其它表示都可以用这三个构造

定义(特征标): 矩阵表示 R 的特征标 $\chi_R : G \longrightarrow \mathbb{C}$.

$\forall g \quad \chi_R(g) = \mathrm{tr}\, R_g \qquad\qquad g \longmapsto \mathrm{tr} R_g$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "\chi_R = \mathrm{tr}\circ R"'] & GL_n \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

注1 保留必要信息，又不像矩阵一样复杂(矩阵用基底)

2. $\chi_R(1_G) = \mathrm{tr}\, I_n = n = \dim R$

例: S_3

	1	x	x^2	y	xy	x^2y
χ_T	1	1	1	1	1	1
χ_Σ	1	1	1	-1	-1	-1
χ_A	2	-1	-1	0	0	0

· 每一行是 $|S_3|$ 维的向量，行之间正交，不相同的列之间也正交

定义(共轭): $g, g' \in G$ 是共轭的，如果 $\exists\, h \in G$, $hgh^{-1} = g'$

注1 共轭是群上的等价关系

2. $g \in G$, g 的**共轭类** $C(g) = \{hgh^{-1} \mid \forall h \in G\}$

$\forall\, g, g' \in G \quad C(g) = C(g') \Longleftrightarrow g = hgh^{-1} \quad \exists\, h \in G$

例: S_3 共轭类 $\{1\}$ $\{x, x^2\}$, $\{y, xy, x^2y\}$

特征标在共轭类上是常数 $g' = hgh' \Longrightarrow R_{g'} = R_h R_g R_h^{-1}$

$\mathrm{tr}\, R_{g'} = \mathrm{tr}\, R_h R_g R_h^{-1} = \mathrm{tr}\, R_h^{-1} R_h R_g = \mathrm{tr}\, R_g$

定义(可逆线性映射群 $GL(V)$)：V 是线性空间 $V\neq\{0\}$

$GL(V)=\{f: V\longrightarrow V \mid f \text{ 可逆}\}$，乘法：映射复合

定义(群表示) G 在 V 上的表示：$\rho: G\longrightarrow GL(V)$，$\rho$ 群同态

如果在 V 上选一组基，可以再得到一个矩阵表示

$$G \xrightarrow{\rho} GL(V) \xrightarrow{M_B^B} GL_n$$

$$R = M_B^B\circ\rho$$

*1 ρ_g 是 $V\longrightarrow V$ 的线性映射，$\forall v\in V$，$\rho_g(v)\in V$

$$\rho_{gh}=\rho_g\circ\rho_h$$

$$\rho_g(av+bw) = a\rho_g(v)+b\rho_g(w)$$

2. 不可约表示

定义(G 不变向量)：$\rho: G\to GL(V)$ 表示，$v\in V$，G 不变，如果

$\forall g\in G$，s.t. $\rho_g(v)=v$

$\rho_g(v)$ 也简写为 gv

*1. 平均向量：$\forall v\in V$，定义 $\tilde{v}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv$，$\tilde{v}$ 是 G 不变的

定义(G 不变子空间) $\rho: G\to GL(V)$ 表示，$W\subset V$ 子空间，

W 是 G 不变的，如果 $\forall g\in G$，$w\in W$，st $\rho_g(w)\in W$

$\forall g\in G$，$gW\subset W$ 或 $\rho_g W\subset W$

引理：如果 $W\subset V$ 是 G 不变子空间，则 $gW=W$，$\forall g\in G$

注 1. $\rho: G\to GL(V)$，$W\subset V$ G 不变子空间

$\rho|_W: G\to GL(W)$

$g\to \rho_g: W\to W$ ρ 限制在 W 上也是表示

2. $V=W_1\oplus W_2$ W_1, W_2 G 不变

$\rho: G\to GL(V)$ W_1, W_2 的基的并构成 V 的一组基

在这组基上 $R_g=\begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$

定义（不可约表示）$\rho: G\to GL(V)$ 表示，如果 V 没有真 G 不变子空间，则 ρ 是一个不可约表示。反之则是可约的

定理（马什克）：有限群 G 在非零有限维复线性空间上的每个表示都是不可约表示的直和

注 1. 群论的一个重要研究内容是不可约表示的分类

例：S_3 的全部不可约表示是 T，Σ，A

3 酉表示（幺正表示）

定义（酉表示）$R: G\to GL_n$ 是酉的，如果 $\forall g\in G$，R_g 是酉矩阵
（幺正）

例：三维空间的转动群 SO(3) 的有限维不可约西表示

$R_j \quad j = 0, 1, 2 \cdots \qquad \dim R_j = 2j+1$

氢原子 H 在 SO(3) 下不变

$\Rightarrow [H, J^2] = [H, J_z] = [J^2, J_z] = 0$

$\Rightarrow$ 可以同时对角化

氢原子的态空间可以写成 SO(3) 不可约表示的直和

$$n=1 \qquad V_1 = R_0$$

$$n=2 \qquad V_2 = R_0 \oplus R_1$$

$$n=3 \qquad V_3 = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$$

$$\vdots$$

(n, j, j_3) 分别标记了 H, J^2, J_z 的特征值

(H, J^2, J_z) 的共同特征向量构成上面空间的一组基