$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{\varepsilon}_m + a_{m+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \in W_2$$

均有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = a_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha} = a_{m+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \in L(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n),$$

故 $W_2 \subset L(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$；显然，后者中任一向量 $\boldsymbol{\alpha} \perp W_1$，所以 $W_2 = L(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$，且 $W_2 \perp W_1$；又 $W_2 + W_1 = V$，故 W_2 是 W_1 的正交补.

由定理的证明可见

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

此结论由节 2.6 中的维数公式(2 - 6)及 $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ 也可得到.

例　设 $W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的子空间，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,1,1)$. 求 $W^{\perp}$.

解　设 $\boldsymbol{x} = (x_1,,x_2,x_3,x_4) \in W^{\perp}$，于是 $\boldsymbol{x} \perp W$. 容易证明：$\boldsymbol{x} \perp W$ 的充要条件是

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}_1) = 0 \quad 且 \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0.$$

因此 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

容易解得 $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,-2,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2 = (0,-1,0,1)$，$\lambda_1$，$\lambda_2$ 为任意实数. 所以 $W^{\perp} = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$.

附录　双重连加号 $\sum\sum$　连乘号 $\prod$

n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 求和时，可将 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 表示为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，$\sum$ 叫做求和的连加号. 例如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n.$$

用两个角标编号的 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1j}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \cdots, & a_{ij}, & \cdots, & a_{in} \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mj}, & \cdots, & a_{mn} \end{matrix} \qquad ①$$

求它们的和 S 时,可以先把第一个角标为 i 的 n 个数相加,记作

$$S_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{ij} + \cdots + a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

然后再把 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 相加,得

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \qquad ②$$

同样也可以先固定第二个角标,而对第一个角标 i 求和,得

$$S'_j = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{ij} + \cdots + a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \quad j = 1,\cdots,n,$$

然后把 $S'_1, S'_2, \cdots, S'_n$ 相加得

$$S = \sum_{j=1}^{n} S'_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}. \qquad ③$$

显然,②,③ 式相等. 这表明对角标 i 与 j 的求和次序可颠倒.

欲对 ① 式中部分数求和,可注明角标应满足的条件,例如

$$\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij} = (a_{21} + a_{31} + \cdots + a_{n1}) + (a_{32} + a_{42} + \cdots + a_{n2}) + \cdots + (a_{n-1,n-2} + a_{n,n-2}) + a_{n,n-1}.$$

再如 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n$ 可表示为 $\sum\limits_{j\neq i} a_j$.

以后,我们有时也用连乘积记号 $\prod$,例如 $\prod\limits_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 \cdots a_n$.

习　题

1. 检验下列集合对指定的加法和数量乘法,是否构成实数域上的线性空间.

(1) $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ 对通常的向量加法和如下定义的数量乘法:

$$\lambda \circ (x,y) = (\lambda x, y);$$

(2) 集合 $\mathbf{R}^2$,其加法同(1),数量乘法为:

$$\lambda \circ (x,y) = (x,y), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R};$$

(3) 集合 $\mathbf{R}^2$,其加法同(1),数量乘法为:

$$\lambda \circ (x,y) = \begin{cases} (0,0), & \lambda = 0, \\ \left(\lambda x, \dfrac{y}{\lambda}\right), & \lambda \neq 0; \end{cases}$$