线性方程组

向量和矩阵

- 标量（scalar, 1×1 ）： c， 实数
- 向量（矢量， vector）：
  - 列向量（column vector, m×1 ）： $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$
  - 行向量（row vector, 1×n ）： $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$
- 矩阵（matrix, m×n ）：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

  - A_{ij}: 矩阵A第i行第j列的元素。m=n： 方阵

应用： 矩阵力学

内容提要

- **线性方程和矩阵**
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法求矩阵的逆
- 消元法和矩阵行变换
- 行变换和矩阵乘法
- LU分解

线性方程组：二元

- **线性方程：**
  - 未知数最高次数是1的方程
- 矩阵形式：$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 11\end{pmatrix}$
- **行观点：** 点乘
  - 几何问题转化为代数问题

$$(1 \quad -2)\cdot(x \quad y) = x-2y = 1$$
$$(3 \quad 2)\cdot(x \quad y) = 3x+2y = 11$$

$$x-2y=1$$
$$3x+2y=11$$

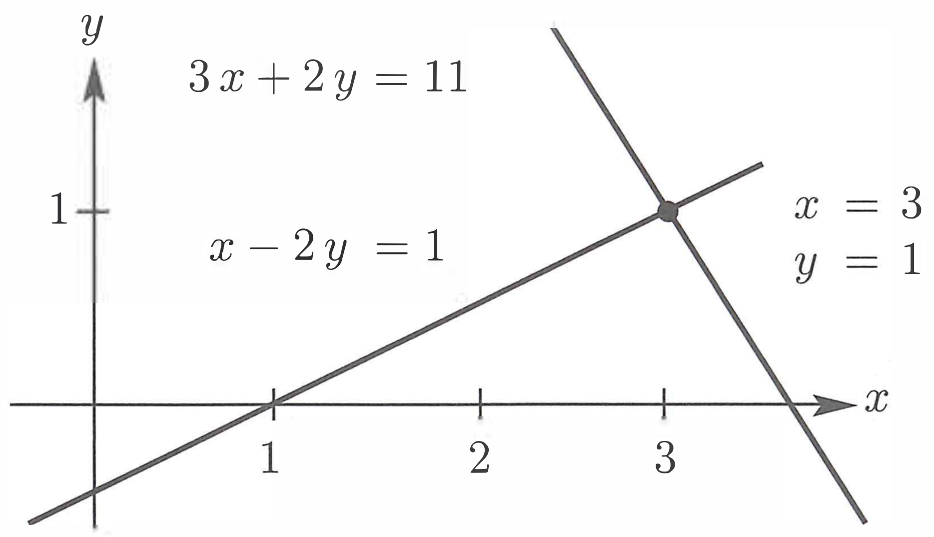

Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性方程组：二元

- **线性方程：**
  - 未知数最高次数是1的方程
- 矩阵形式：$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
- **列观点：** 线性组合

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$x - 2y = 1$$
$$3x + 2y = 11$$

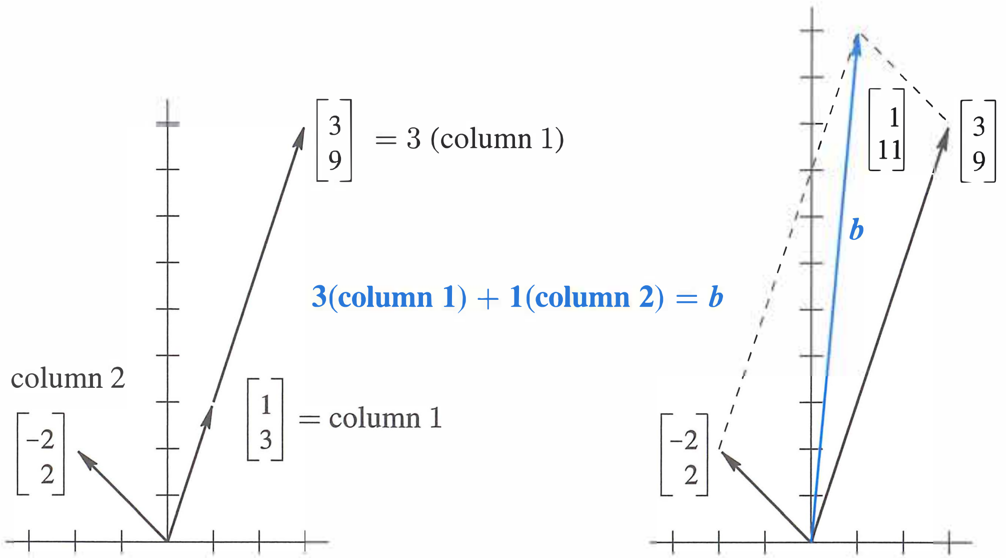

Figure 2.2: *Column picture*: A combination of columns produces the right side (1, 11).

Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性方程组：三元

- 三元线性方程：

$$x + 2y + 3z = 6$$
$$2x + 5y + 2z = 4$$
$$6x - 3y + z = 2$$

- 矩阵形式：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 行观点：点乘

$$(1 \quad 2 \quad 3) \cdot (x \quad y \quad z) = 6$$
$$(2 \quad 5 \quad 2) \cdot (x \quad y \quad z) = 4$$
$$(6 \quad -3 \quad 1) \cdot (x \quad y \quad z) = 2$$

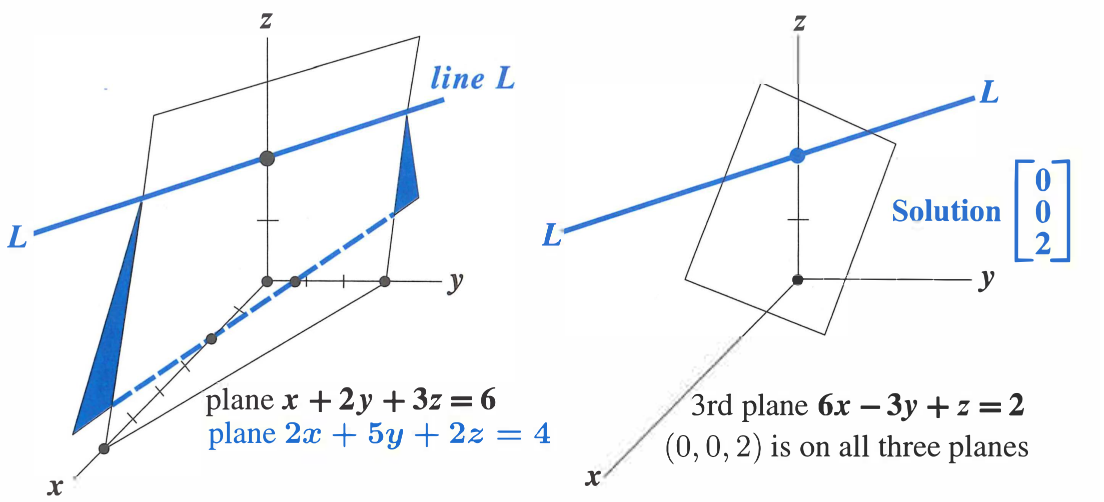

Figure 2.3: *Row picture*: Two planes meet at a line L. Three planes meet at a point.

Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性方程组：三元

- 三元线性方程：

$$x + 2y + 3z = 6$$
$$2x + 5y + 2z = 4$$
$$6x - 3y + z = 2$$

- 矩阵形式：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 列观点：线性组合

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

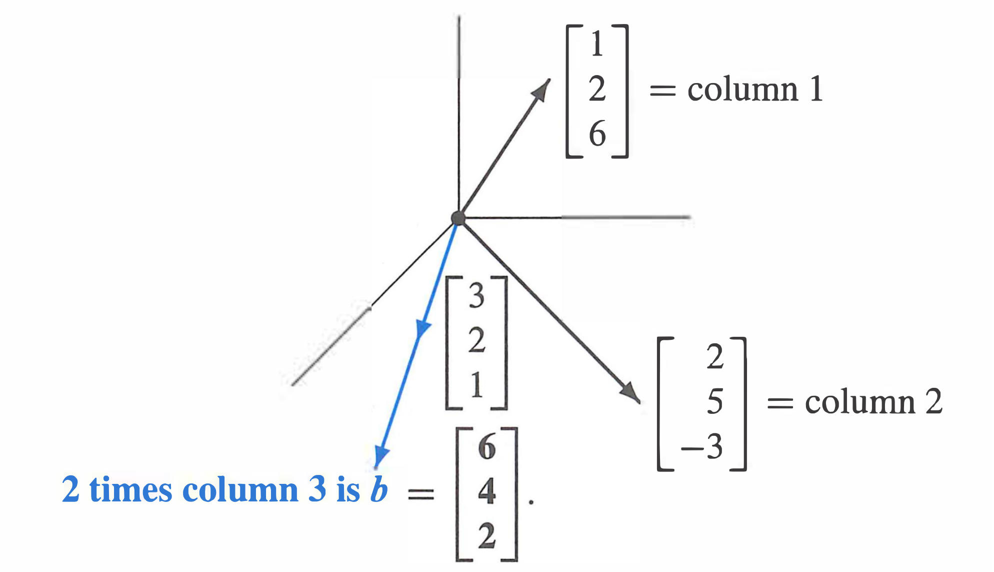

Figure from Strang, introduction to linear algebra

一般线性方程组

- 考虑n个n元线性方程构成的方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,x_j = b_i, \qquad\qquad i = 1,\cdots,n$$

- 把系数写成系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- 那么线性方程组也可以写成矩阵和向量的乘法，也可以看成是矩阵把向量$\boldsymbol{x}$映射成向量$\boldsymbol{b}$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

更一般线性方程组

- 考虑m个n元线性方程构成的方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j = b_i, \qquad\qquad i = 1, \cdots, n$$

- 把系数写成系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$
- 那么线性方程组可以$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- 此时A不是方阵

更一般线性方程组：行观点

- 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- 矩阵写成m个**行向量**：$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$
- 点乘：$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = b_i, \qquad i = 1, \cdots, m$
  - 每一个方程代表**n**维空间中的一个**超平面（hyper-plane）**
  - m个方程：m个超平面相交

图请自行脑补

更一般线性方程组：列观点

- 线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$
- 矩阵写成n个列向量：$A=(\tilde{\boldsymbol{a}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{a}}_n)$
- **m维**向量的线性组合：

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{a}}_i x_i=\boldsymbol{b}$$

图请自行脑补

几何问题转化为代数问题→ 方程的问题转化为矩阵问题

矩阵性质→方程的性质

小结

- m个方程，n个未知数的线性方程组可以写成矩阵和向量的乘法
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
- 行观点
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的每一行看成点乘：$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = b_i, \qquad i = 1, \cdots, m$
  - 每一个方程代表n维空间中的一个**超平面**，方程的解就是超平面间的交点
- 列观点
  - 矩阵写成n个列向量：$A = (\tilde{\boldsymbol{a}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{a}}_n)$
  - m维向量的线性组合：$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{a}}_i x_i = \boldsymbol{b}$，方程解就是合适的系数使得$\tilde{\boldsymbol{a}}_i$的线性组合是$\boldsymbol{b}$

内容提要

- 线性方程和矩阵
- **消元法（elimination）解线性方程**
- 消元法求矩阵的逆
- 消元法和矩阵行化简
- 行变换和矩阵乘法
- LU分解

消元法解线性方程组

- 2元线性方程组

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 8y &= 8 \end{aligned}$$

第二个方程减去第一个方程乘以3，消去3x

- 消元法：得到一个上三角方程组
  - 在第二个方程中消去x：从第二个方程减去第一个方程乘一个系数（例子中为3）
- 消元后第二个方程解出$y = 1$（左右两边同时乘1/8），代回到第一个方程得到$x = 3$
- 解x的过程也可以看成把$y = 1$乘2再加到第一个方程

消元法解线性方程组

- 2元线性方程组

Before $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$ **After** $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 8y &= 8 \end{aligned}$ $\begin{aligned} &(\textit{multiply equation } 1 \textit{ by } 3) \\ &(\textit{subtract to eliminate } 3x) \end{aligned}$

- 几何图像：消元将第二条直线围绕着交点转至水平方向（降维）

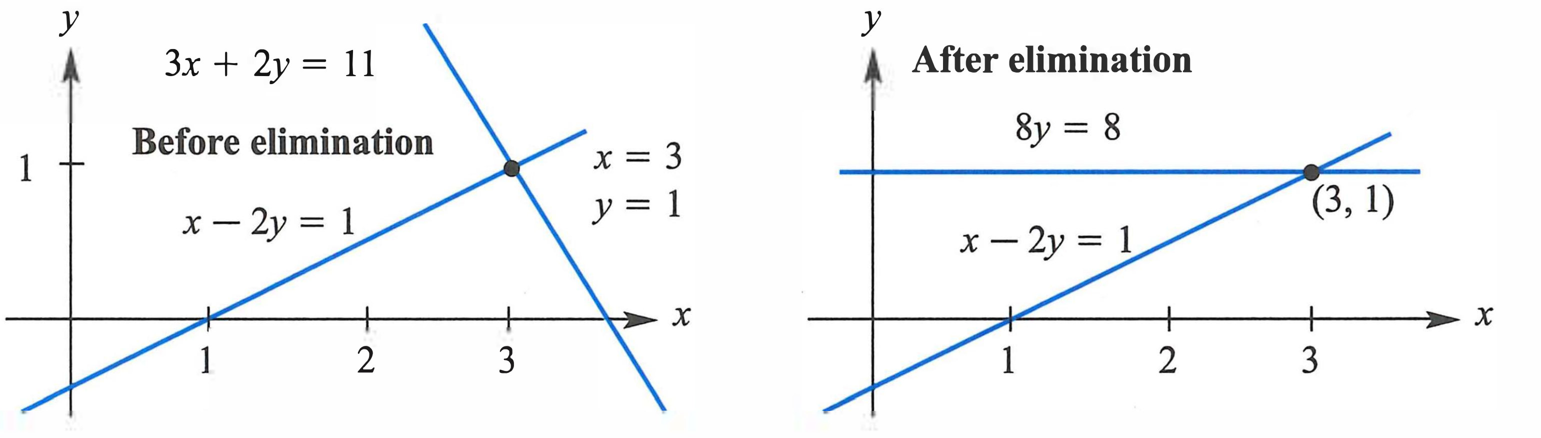

Figure 2.5: Eliminating x makes the second line horizontal. Then $8y = 8$ gives $y = 1$.

Figure from Strang, introduction to linear algebra

消元法解线性方程组

主元（pivot）

$$4x - 8y = 4$$
$$3x + 2y = 11$$

被消变量的系数

乘子l_{ij}=$\dfrac{\text{第}i\text{行被消变量的系数}}{\text{第}j\text{行的主元}}$

方程2 − 乘子l_{21}×方程1　　$l_{21} = \dfrac{3}{4}$

消元法解线性方程组

- 主元：消元法得到上三角方程之后每个方程的第一个非0系数
- 例：主元为1和8（两个）

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 8y &= 8 \end{aligned}$$

第二个方程减去第一个方程乘以3，消去3x

- 例：主元为a_{11}至a_{nn}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

消元法失效

- 2元线性方程组：两条直线求交点、两个向量的线性组合=b
- 例1:

$$x - 2y = 1$$
$$3x - 6y = 11$$

$$x - 2y = 1$$
$$0y = 8$$

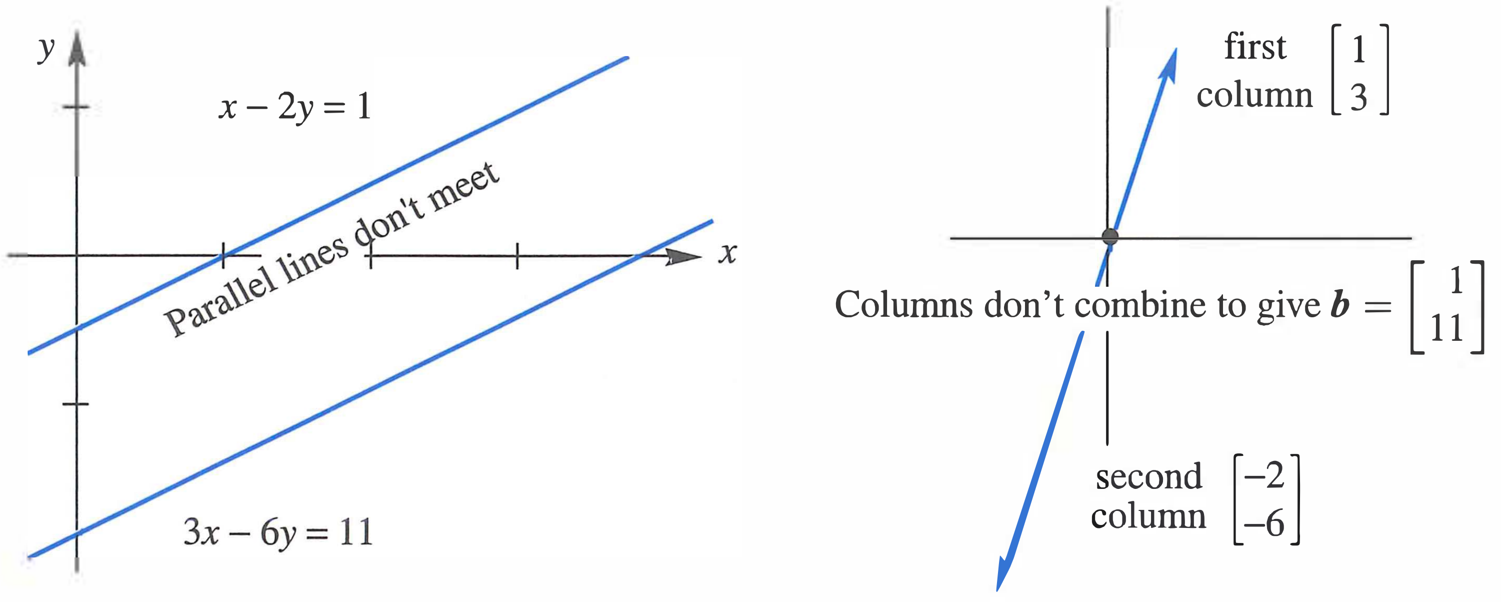

Figure 2.6: Row picture and column picture for Example 1: ***no solution***.

只有一个主元（0不是主元）

Figure from Strang, introduction to linear algebra

消元法失效

- 2元线性方程组：两条直线求交点、两个向量的线性组合=**b**
- 例2:

$$x - 2y = 1$$
$$3x - 6y = 3$$

$$x - 2y = 1$$
$$0y = 0$$

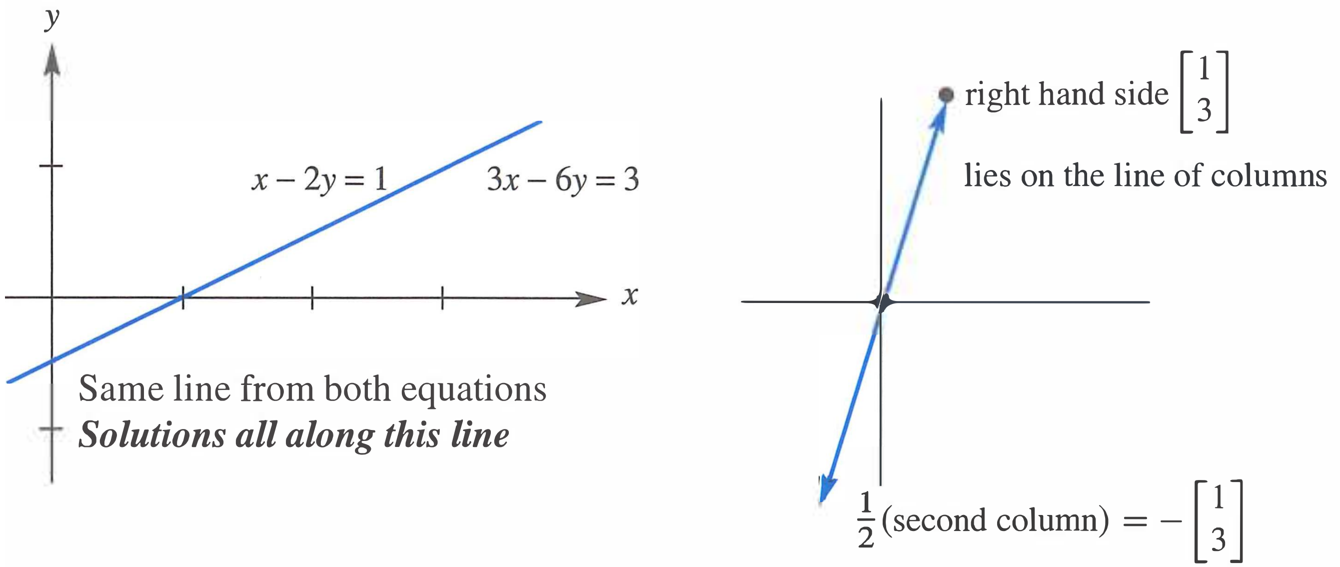

Figure 2.7: Row and column pictures for Example 2: *infinitely many solutions*.

只有一个主元（0不是主元）

Figure from Strang, introduction to linear algebra

消元法失效

- 失效条件：n个未知数，主元数目少于n
  - 消元法得到$0 \neq 0$：没有解

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c}\text{Subtract 3 times}\\ \text{eqn. 1 from eqn. 2}\end{array} \qquad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ \mathbf{0}y &= 8. \end{aligned}$$

  - 消元法得到$0 = 0$：无穷多解

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c}\text{Subtract 3 times}\\ \text{eqn. 1 from eqn. 2}\end{array} \qquad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ \mathbf{0}y &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

消元法“失效”

- 有些时候主元看上去是0，但其实交换一下方程就可以恢复
- 例：

$$\begin{aligned} 0x + 2y &= 4 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 2y &= 4. \end{aligned}$$

消元法（方程个数=未知数个数）

- n元线性方程组求解

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1,\cdots,n$$

- 算法：
  1. 找到第1个x_1系数不为0的方程并移到最上面。x_1的系数就是第一个主元
  2. 从第2个到第n个方程中消去x_1（方程i – l_{i1}x方程1）
  3. 得到第2个到第n个方程构成n-1元的线性方程组，重复步骤1。
  4. 最后结果要么是一个上三角方程组，要么失效（主元数目小于未知数）
  5. 上三角的情况，从最后一个方程开始解出全部未知数
- 递归。操作：**对换**（交换两行）、**倍加**（某一行乘系数加到另一行）、**倍乘**（某一行乘一个非零常数）

例：三元线性方程组

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x+2y+2z &= 9 \\ x+2y+3z &= 10 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ y+z &= 3 \\ y+2z &= 4 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ y+z &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

小结

- 考虑n个未知数，n个方程的线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- 消元法把线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$变成$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$，其中$U$是个上三角矩阵
- 算法：用前面的方程消去后面方程中的未知数
- 主元数目=方程个数：有解，从最后一个方程开始解出全部未知数
- 主元数目<方程个数：无解或者有无穷多解
- 更一般线性方程组解的存在性和通解将在后面课程学习

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- **消元法求矩阵的逆**
- 消元法和矩阵行变换
- 行变换和矩阵乘法
- LU分解

逆矩阵（inverse matrix）

- 方阵A的逆矩阵A^{-1}满足

$$A^{-1}A = I \text{ 且 } AA^{-1} = I$$

  - I是单位矩阵，非对角元0，对角元1。$IA = AI = A$
- 把A^{-1}的每一列看成未知数，$AA^{-1} = I$ 就是一系列线性方程组
- 逆矩阵存在的判定：
  - nxn方阵A的逆矩阵A^{-1} 存在当且仅当有n个主元
  - 还有更多其它的判定方法

高斯-若当消元法（Gauss-Jordan elimination）

- 把$AA^{-1}=I$看成线性方程组

$$A(\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n) = I$$

- $$\boldsymbol{e}_i = (0 \quad \cdots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第i位}}}{1} \quad \cdots \quad 0)^T$$

- 可以用消元法解$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$
- 对增广矩阵$(A \quad I) = (A \quad \boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n)$做消元操作

高斯-若当消元法

- 例：所有主元的乘积=行列式，矩阵可逆⇔ 行列式不为0

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

高斯-若当消元法

- 例：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

小结

- 求逆矩阵$AA^{-1} = I$ ⇔解线性方程组
- nxn方阵A的逆矩阵A^{-1} 存在当且仅当有n个主元
- 高斯-若当消元法
  - 对增广矩阵$(A \quad I) = (A \quad \boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n)$做消元操作（行变换）
  - $(A \quad I)$通过行变换变成$(I \quad A^{-1})$

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法求矩阵的逆
- **消元法和矩阵行变换**
- 行变换和矩阵乘法
- LU分解

增广矩阵（augmented matrix）

- 方程中：置换、倍加、倍乘同时作用在系数矩阵A和$\boldsymbol{b}$上
- 把A和$\boldsymbol{b}$写在一起构成增广矩阵$(A\ \boldsymbol{b})$，可以把A和$\boldsymbol{b}$看成增广矩阵的分块形式
  - n行，n+1列的矩阵
- 消元法：对增广矩阵做置换、倍加、倍乘
- 可以考虑对一般矩阵进行置换、倍加、倍乘

矩阵的（初等）行变换

- 前面讲到的消元法的所有操作都可以转化为矩阵上的操作
- 考虑一个mxn的矩阵A，可以对它做下面的变换
  - **对换**（交换两行）
  - **倍加**（某一行乘系数加到另一行）
  - **倍乘**（某一行同时乘以一个非0常数）
- 这些变换被称为矩阵的（初等）行变换

行变换例子

- 对换

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- 倍加

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

初等行变换的性质

- mxn的矩阵A初等行变换:
  - **对换**（交换两行）
  - **倍加**（某一行乘系数加到另一行）
  - **倍乘**（某一行同时乘以一个非0常数）
- 性质:
  - **可逆**：每个变换都有一个逆变换把矩阵变成原来的形式
- 如果一个矩阵可以行变换成另一个矩阵，则它们是**行等价**的
  - 如果两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，则它们的**解集相同**
  - 消元法：利用行变换用来简化线性方程组
  - 一般线性方程组的通解是我们前半学期的重点

初等行变换的目标

- 回忆：高斯消元法把系数矩阵变成了上三角矩阵

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 8y &= 8 \end{aligned}$$

- 行变换的目标也是把一般矩阵简化成类似的形式
- **行阶梯矩阵**：满足下列三条性质的矩阵M
  1. 如果M的第i行是0行，则下面的所有行的都是0行
  2. 如果M的第i行不全是0，则从左数第一个非0元素叫做主元。每个主元都在它上面行的主元的右边的列
  3. 同一列中在主元下面的元素都是0

行阶梯矩阵(row echelon matrix)

- **行阶梯矩阵**：满足下列三条性质的矩阵U
  1. 如果M的第i行是0行，则下面的所有行的都是0行
  2. 如果M的第i行不全是0，则从左数第一个非0元素叫做主元。每个主元都在它上面行的主元的右边的列
  3. 同一列中在主元下面的元素都是0
- 消元法就是把增广矩阵变成行阶梯矩阵的过程

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

约化行阶梯矩阵(reduced row echelon matrix)

- 行阶梯矩阵可以通过行变换进一步化简
- **约化行阶梯矩阵**：满足下列额外性质的行阶梯矩阵U

4. 每个主元都是1
5. 一列中主元上面的元素都是0，也就是说，主元是该列中唯一的非零元素

- 行阶梯矩阵变成约化行阶梯矩阵的过程就是解未知数和回带的过程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

行阶梯矩阵和约化行阶梯矩阵

- U是同A行等价的行阶梯矩阵，记做$U = \text{ref}(A)$
- U是A同行等价的约化行阶梯矩阵，记做$U = \text{rref}(A)$
- **定理**：对于任意的矩阵A，有且只有一个矩阵U，使得$U = \text{rref}(A)$
  - 唯一性证明见Lay书的附录A
  - 这个定理告诉我们同A行等价**约化行阶梯矩阵**的存在唯一性
  - 同A行等价的**行阶梯矩阵**并不惟一

例

- 找到下面矩阵的等价行阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换1、4行}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

消去第一列主元下面元素

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主列和自由列

- 约化行阶梯矩阵：
  - **主列**：主元所在的列，根据定义，主列上只有主元是1，剩下元素都是0
  - **自由列**：没有主元的列
- 注意：因为约化行阶梯矩阵唯一，且行变换不改变列的次序，所以我们可以对原矩阵也定义主列和自由列

主列　　　　　　　　　　　　　　　　主列

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

自由列　　　　　　　　　　　　　　　自由列

一般线性方程组的解法

- 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中$A$是一个mxn的矩阵
  - n个未知数，m个方程
- 解法：
  - 对增广矩阵$(A, \boldsymbol{b})$做行约化，将A变成约化行阶梯矩阵$(\text{rref}(A), \boldsymbol{b}')$
  - 解的**存在性**：如果rref(A)有0行，但是该行对应的$\boldsymbol{b}'$中的元素不为0，则无解。反之则有解
  - 解的**唯一性**：如果rref(A)没有自由列，则方程的解唯一
  - 主列对应的未知数可以用$\boldsymbol{b}'$中的元素和自由列对应的未知数表示出来。此时自由列对应的未知数是任意参数
  - 注：判断解的存在性可以只把A化成行阶梯矩阵

例

- 3个方程，5个未知数
  - 主列：1、3、5列，对应x_1, x_3, x_5
  - 自由列：2、4列，对应x_2, x_4

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

- 解：把x_1, x_3, x_5用x_2, x_4表示出来
  - $x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -6x_2 - 3x_4$
  - $x_3 - 4x_4 = 5 \Rightarrow x_3 = 5 + 4x_4$
  - $x_5 = 7$
- 学习线性空间以后还会再回来看这个解

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法求矩阵的逆
- 消元法和矩阵行变换
- **行变换和矩阵乘法**
- LU分解

行变换：倍加

- **倍加**（某一行乘系数加到另一行）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0 \\ -2\times 2+8 \\ 0+0+10 \end{pmatrix}$$

- 将向量的第一个分量乘-2加到第二个分量

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

- 矩阵的第一行乘-2加到第二行

行变换：对换

- **对换**（交换两行）
- 置换矩阵：$P_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ 4 & 9 & -3\\ -2 & -3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\ -2 & -3 & 7\\ 4 & 9 & -3\end{pmatrix}$
- 一般的nxn的置换i和j行的矩阵怎么写？

行变换：倍乘

- **倍乘**（某一行同时乘以一个非0常数）
- 倍乘矩阵：$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$
- $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

初等矩阵

- 对mxn矩阵A行变换：mxm初等矩阵左乘A
- 倍加： A第i行乘一个非0常数a再加到第j行
- 倍加矩阵：对角线上元素是1，第i行第j列元素A_{ij}是a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & & j & \\ & & & & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & a & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & j & & & & \\ & \downarrow & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & a & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = I + ae_{ij} \qquad (i \neq j)$$

Figure from Artin, algebra

初等矩阵

- 对mxn矩阵A行变换：特殊的mxm矩阵左乘A
- 置换：置换的第i行和第j行
- 置换矩阵：对角线第i行和第j行的元素A_{ii}和A_{jj}是0，其它元素都是1，并且$A_{ij} = A_{ji} = 1$

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{matrix} & & j & & j & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}
\end{array} = I + e_{ij} + e_{ji} - e_{ii} - e_{jj}.$$

Figure from Artin, algebra

初等矩阵

- 对mxn矩阵A行变换：特殊的mxm矩阵左乘A
- 倍乘：A第i行乘以一个非0常数c
- 倍乘矩阵：对角线第i行元素A_{ii}为c，对角线剩下元素都是1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \quad\quad i \\ \quad\quad \downarrow \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} = I + (c-1)e_{ii}, \qquad (c \neq 0).$$

Figure from Artin, algebra

初等矩阵

- 三种初等矩阵
  - 倍加矩阵：对角线上元素是1，第i行第j列元素A_{ij}是a
  - 置换矩阵：对角线第i行和第j行的元素A_{ii}和A_{jj}是0，其它元素都是1，并且$A_{ij} = A_{ji} = 1$
  - 倍乘矩阵：对角线第i行元素A_{ii}为c，对角线剩下元素都是1
- **性质**：所有初等矩阵都**可逆**
  - 倍加矩阵：$E = I + ae_{ij}$，$E^{-1} = I - ae_{ij}$
  - 置换矩阵和自己互逆
  - 倍乘矩阵：$E = I + (c-1)e_{ii}$，$E^{-1} = I + (c^{-1} - 1)e_{ii}$

Figure from Artin, algebra

行变换和初等矩阵左乘

- mxn的矩阵A初等行变换：
  - **对换**（交换两行）
  - **倍加**（某一行乘系数加到另一行）
  - **倍乘**（某一行同时乘以一个非0常数）
- 初等矩阵
  - 倍加矩阵：对角线上元素是1，第i行第j列元素A_{ij}是a
  - 置换矩阵：对角线第i行和第j行的元素A_{ii}和A_{jj}是0，其它元素都是1，并且$A_{ij} = A_{ji} = 1$
  - 倍乘矩阵：对角线第i行元素A_{ii}为c，对角线剩下元素都是1
- 对矩阵A行变换等价于对应的初等矩阵左乘A（右乘会发生什么）

消元法和初等矩阵

- 消元法：用一系列初等矩阵$\{E_i\}$左乘A，把A化简成行阶梯矩阵
$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = U$$
- 消元、解方程等问题统一成了矩阵乘法
- 例
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\3 & 2 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 8 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-5/2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -4 & 8\\2 & -3 & 2 & 1\\5 & -8 & 7 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 2 & 1\\0 & 1 & -4 & 8\\0 & -1/2 & 2 & -3/2\end{bmatrix}$$

增广矩阵（augmented matrix）

- 方程中：置换和倍加同时作用在系数矩阵A和$\boldsymbol{b}$上
- 把A和$\boldsymbol{b}$写在一起构成增广矩阵$(A\ \boldsymbol{b})$，可以把A和$\boldsymbol{b}$看成增广矩阵的分块形式
  - n行，n+1列的矩阵
- E乘在增广矩阵上，分块乘法：分别乘在A，$\boldsymbol{b}$上
  - $E(A\ \boldsymbol{b}) = (EA\ E\boldsymbol{b})$
- 矩阵乘法只需要第一个的列数=第二个行数

小结

- 将线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的系数$A$和$\boldsymbol{b}$合在一起构成对应的增广矩阵$(A\ \boldsymbol{b})$
- 消元法：对增广矩阵做行变换
  - 置换：交换两行
  - 倍加：将某一行乘以一个系数再加到另一个行
  - 倍乘：将某一行乘以一个非0常数
- 解线性方程组⇔矩阵行变换
  - 行变换不改变线性方程组的解集
- 行变换：特定矩阵左乘被变换的矩阵（右乘会发生什么？）

内容提要

- 线性方程和矩阵
- 消元法（elimination）解线性方程
- 消元法求矩阵的逆
- 消元法和矩阵行化简
- **LU分解**

倍加矩阵的形状

- 倍加矩阵和其逆：倍加矩阵和逆矩阵都同时是下（上）三角

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

LU分解

- U是和A等价的行阶梯矩阵，U是上三角的
$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U$$
  - $E_1, E_2 \cdots E_k$中的倍加矩阵全是**下三角**的
  - A到U的过程中我们只需消去主元下面的元素
- **假设**：$E_1, E_2 \cdots E_k$中没有置换矩阵
- 左右两边左乘$E_k \cdots E_2 E_1$的逆
$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U$$
- 每一个E_i^{-1}都是下三角的，所以乘积$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$下三角的
$$A = LU$$

LU分解

- 如果A约化成行阶梯矩阵U 的过程中没有置换，$E_k \cdots E_2 E_1 A = U$
- 则A有一个LU分解
$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU$$
- 把A写成一个下三角阵和一个上三角阵的乘积
- 应用：解系数相同的一系列线性方程组（见Lay，2.5）

- 如果A约化成行阶梯矩阵U 的过程中有置换
- 则存在一个置换矩阵P，使得PA有一个LU分解
$$PA = LU$$

LU分解

- 例：

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}=LU.$$