向量空间

颜文斌
清华大学

内容提要

- **向量空间**
- 线性独立、基和维度
- 矩阵A的零空间（$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解空间）
- 方程$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的完整解
- 四个子空间的维度

向量空间$\mathbb{R}^n$和 $\mathbb{C}^n$

- $\mathbb{R}^n$：所有n个实数分量的列向量的集合
- $\mathbb{C}^n$：所有n个复数分量的列向量的集合

$$\begin{bmatrix} 4 \\ \pi \end{bmatrix} \text{ is in } \mathbf{R}^2, \quad (1,1,0,1,1) \text{ is in } \mathbf{R}^5, \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \text{ is in } \mathbf{C}^2$$

- 性质：$\mathbb{R}^n$/ $\mathbb{C}^n$中的元素的线性组合还属于$\mathbb{R}^n$/ $\mathbb{C}^n$
  - 注意：数乘时所乘的数要和向量的分量属于同一个数域

Figure from Strang, introduction to linear algebra

一般向量空间（线性空间）

- 定义：域$\mathbb{F}$上的向量空间是具有加法$+: V\times V \to V$和数乘$\cdot: \mathbb{F}\times V \to V$运算且满足以下公理的集合$V$
  1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
  2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$
  3. 存在唯一的零向量$\boldsymbol{0}$使得对于任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$
  4. 对任意$\boldsymbol{x}$，存在唯一的向量$-\boldsymbol{x}$使得$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$
  5. 1乘$\boldsymbol{x}$等于$\boldsymbol{x}$
  6. $(c_1c_2)\boldsymbol{x}=c_1(c_2\boldsymbol{x})$
  7. $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}$
  8. $(c_1+c_2)\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{x}$
- 向量空间：（粗略的说）定义了加法和数乘的空间

向量空间

- 向量空间中的元素不一定是狭义的“向量（一列数）”
  - 定义里面并没有规定集合，只是规定了上面运算和运算的性质
  - 根据定义，线性空间V在加法和数乘下是**封闭**的
- 例：实数上的向量空间
  - M : 所有mxn实矩阵构成的空间
  - F: 所有实函数$f(x)$构成的空间
  - Z: 只有零向量的空间
- 维数：
  - M : mn
  - F: 无穷
  - Z: 0

子空间（subspace）

- **定义**：

线性空间V的子空间V_S是V的一个子集，并且满足下面两个条件：对于属于子空间的矢量$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$，以及一个标量c

1. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 是V_S的元素
2. $c\boldsymbol{v}$是V_S的元素

- 子空间对于加法和数乘**封闭**
  - 子空间中元素的线性组合都在同一个子空间
- 子空间必然包含零向量（提示：$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})$）

子空间判定

- 例：$\mathbb{R}^3$中的子空间
  - 不过原点的平面：不是
  - 原点本身：是
  - 过原点的直线：是
  - 过原点的平面：是
  - $\mathbb{R}^3$本身：是
- 直线或者平面的一部分：
  - 平面的某一象限：不是
  - 平面的第一象限和第三象限的并集：不是
- $\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$在子空间中，那么所有线性组合$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$也在子空间中

子空间判定

- 2x2矩阵构成的线性空间M
  - U：所有的上三角矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
  - D：所有的对角矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$
  - 零向量是什么？
  - 单位矩阵I构成子空间吗？

矩阵A的列空间

- 定义：

矩阵A的列空间$C(A)$是A的所有列的线性组合

- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ：
    - $A\boldsymbol{x} \in C(A)$
    - 方程是否有解$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$是否属于$C(A)$
- 如果A是个mxn的矩阵：$C(A)$是$\mathbb{R}^m$的子空间
- 如果把A看成是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的（线性）映射，是$C(A)$是这个线性变换的**像集（像）**（image）

矩阵A的列空间

- 例：

$$Ax \quad \text{is} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{which is} \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

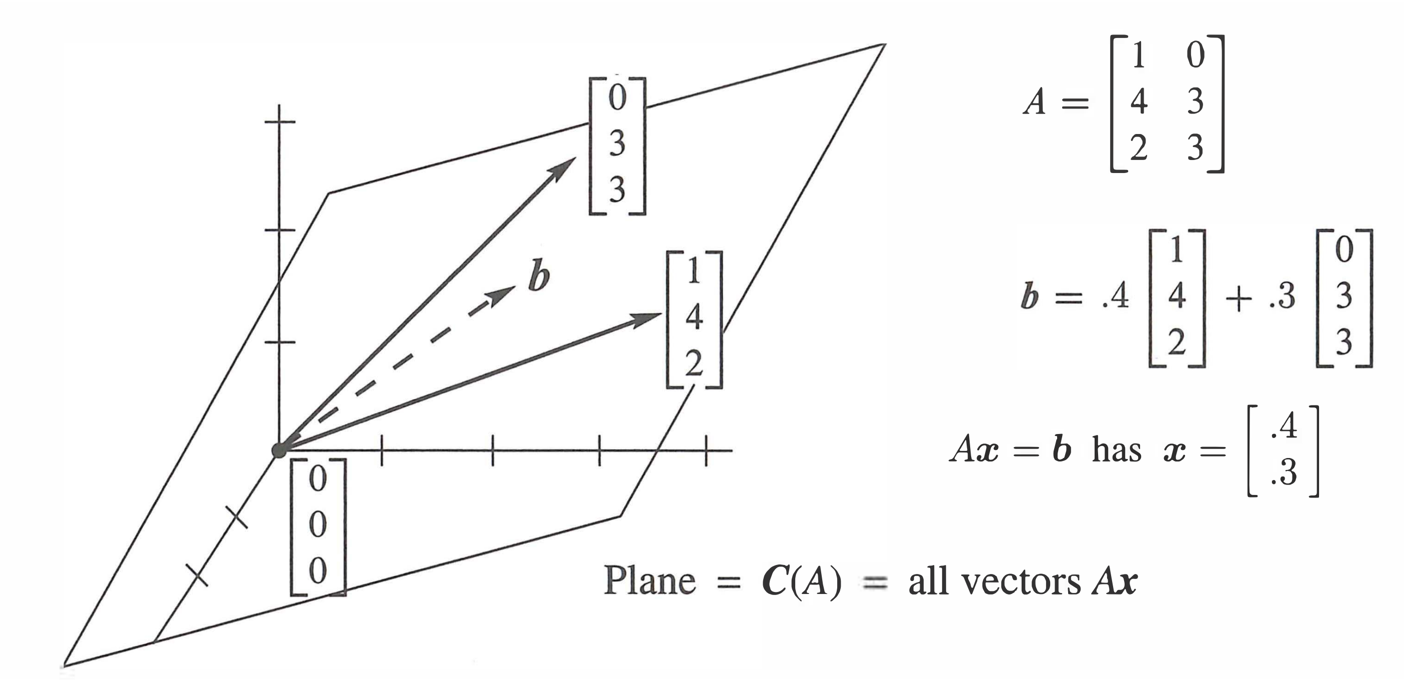

Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性扩张（span）

- 一般来说，向量空间V的子集S不是子空间
- 从S构造出子空间？
- **线性扩张**：$SS = \text{span}(S) = S$中向量的**所有**线性组合的集合
  - SS是V的子空间
  - $C(A)$是A所有列的线性扩张
- 例：以下矩阵的列空间？

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

小结

- 线性空间：满足关于加法和数乘的八条公理的集合
- 例： $\mathbb{R}^n$，所有mxn的实矩阵，等等
- 子空间：对加法和数乘封闭
- mxn实矩阵A的列空间$C(A)$是A的列张成的线性空间， $C(A)$是$\mathbb{R}^m$的一个子空间
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是否有解$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$是否属于$C(A)$

内容提要

- 向量空间
- **线性独立、基和维度**
- 矩阵A的零空间（$Ax = 0$的解空间）
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- 四个子空间的维度

线性独立

- **定义**：n个向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$是线性独立的，当且仅当
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \text{ 只在} x_i = 0 \text{时成立（只有0解）}$$
- 线性相关： n个向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$不是线性独立，那么他们是线性相关的
- 判定：
  - $A = (\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n)$
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是否只有零解
  - 通常A是一个mxn的矩阵，用到解一般线性方程组的知识
- 等价描述：$\{\boldsymbol{v}_i\}$是线性独立的，则集合中每一个向量都不能写成集合中其它向量的线性组合

线性独立

- 例：$\mathbb{R}^2$

(a) The vectors $(1,0)$ and $(0,1)$ are independent.

(b) The vectors $(1,0)$ and $(1,0.00001)$ are independent.

(c) The vectors $(1,1)$ and $(-1,-1)$ are *dependent*.

(d) The vectors $(1,1)$ and $(0,0)$ are *dependent* because of the zero vector.

(e) In $\mathbf{R}^2$, any three vectors (a,b) and (c,d) and (e,f) are *dependent*.

线性独立

- 两个向量是否线性独立同数域$\mathbb{F}$选择密切相关
- **例**：考虑$\mathbb{F} = \mathbb{C}$，$V = \mathbb{C}$
  - 1和虚数单位i都是$\mathbb{C}$中的向量，而且$z_1 1 + z_2 i = 0$在复数域中有非0解
  - 在复数域中，1和虚数单位i是线性相关的
- **例**：考虑$\mathbb{F} = \mathbb{R}$，$V = \mathbb{C}$
  - 1和i都是$\mathbb{C}$中的向量，但是$a_1 1 + a_2 i = 0$在实数域中没有非0解
  - 在实数域中，1和虚数单位i是线性无关的

线性空间的基

- **定义**：线性空间V的基是一组**线性无关**的向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$，并且他们**张成**整个线性空间V
  - **线性无关**：$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ 只在$x_i = 0$时成立
  - **扩张成$\boldsymbol{V}$**：V中的**任何**一个向量$\boldsymbol{v}$都可以写成$\{\boldsymbol{v}_i\}$的线性组合
  - $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 总是$S\{\boldsymbol{v}_i\}$的基
- 例：

The basis vectors $\quad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ are independent. They span $\mathbf{R}^2$.

  - 推广：$\{\boldsymbol{e}_i\}$ 构成$\mathbb{R}^n$中的一组基

Figure from Strang, introduction to linear algebra

线性空间的基

- 根据基的定义：V中的任何一个向量$\boldsymbol{v}$都可以写成基$\{\boldsymbol{v}_i\}$的线性组合
- 假设$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$，这个线性组合是**唯一**的
- 证明：
  - 如果$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$且$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v}_i$，则$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)\boldsymbol{v}_i$
  - 因为$\{\boldsymbol{v}_i\}$线性独立（基的定义），则$(a_i - b_i) = 0$
- 描述一个线性空间的方法之一就是写下它的一组基
- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$\mathbb{R}^m$中某个子空间的一组基，令矩阵$A = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$，则$C(A) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$

线性空间的维度

- 定义：线性空间V的**维度**$\dim V$等于任意一组基中向量的个数
- 线性空间的维度和基的选取**无关**：
- 证明：
  - 两组基：$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$和$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$，假设m>n
  - 因为$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$是基，$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{w}_j a_{ji}$
  - 考虑线性组合$\sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i,j} x_i \boldsymbol{w}_j a_{ji}$，因为$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$线性无关，所以$\sum_{i,j} x_i \boldsymbol{w}_j a_{ji} = \boldsymbol{0}$推出$\sum_i a_{ji} x_i = 0$
  - 但是$\sum_i a_{ji} x_i = 0$中未知数的个数m大于方程的个数n，系数矩阵一定有自由列，所以有非零解
  - 同$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$线性独立矛盾（$\sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$只有零解）=>m不能大于n
  - 同理m不能小于n。最终m=n

线性空间的维度

- 两个线性空间V_1和V_2， 如果任意$\boldsymbol{v} \in V_1$ 可以写成V_2中向量的线性组合，则$\mathrm{dim}V_1 \leq \mathrm{dim}V_2$
- 证明：
  - V_1和V_2的基分别记为：$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$和$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$
  - 由假设，$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{w}_j a_{ji}$
  - 考虑线性组合$\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i,j} x_i \boldsymbol{w}_j a_{ji}$，因为$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_n\}$是基，所以$\sum_i a_{ji} x_i = 0$
  - 又因为$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_m\}$是基，所以$\sum_i a_{ji} x_i = 0$只有0解（$x_i = 0$）
  - $m \leq n$, 或者说$\mathrm{dim}V_1 \leq \mathrm{dim}V_2$

线性空间的维度

- 例：Z
  - 维度为0，基是空集
- 例：矩阵
  - nxn实方阵构成的线性空间的维数是n^2
  - n阶上三角矩阵的子空间维数是$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$
  - n阶对角矩阵子空间维数是n
  - n阶对称矩阵子空间维数是$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

线性空间的维度

- 例：微分方程的解空间
  - $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$，解：$x = c + dt$
  - $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$，解： $x = c\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + d\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

不同基之间的变换

- 线性空间V中的两组基：$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r\}$和$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_r\}$
- 由基的定义可知
  - $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{w}_i\, a_{ij}$，$a_{ij}$是将$\boldsymbol{v}_j$写成$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_r\}$的线性组合时的系数
  - $\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{v}_i\, b_{ij}$，$b_{ij}$是将$\boldsymbol{w}_j$写成$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r\}$的线性组合时的系数
  - 矩阵$A = (a_{ij})$称为从$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_r\}$到$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r\}$的**变换矩阵**
  - 矩阵$B = (b_{ij})$称为从$\{\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r\}$ 到$\{\boldsymbol{w}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_r\}$的**变换矩阵**
- **定理**：矩阵A，B可逆，而且$AB = BA = I$
  - 证明提示：$\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{w}_i\, a_{ij} = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{v}_k\, b_{ki})\, a_{ij}$

小结

- 线性独立：n个向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$线性独立，当且仅当方程$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$只有0解
- 线性空间V的基：一组**线性无关**的向量$\{\boldsymbol{v}_i\}$，并且他们**张成**整个线性空间V
- 线性空间V的基是V中最大的线性无关的向量组
- 线性空间中所有的基都有相同的数量，这个个数就定义为线性空间的**维数**
- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$是$\mathbb{R}^m$中某个子空间的一组基，令矩阵$A = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$，则$C(A) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- **矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间（$\boldsymbol{Ax = 0}$的解空间）**
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- 四个子空间的维度

矩阵A的零空间（Nullspace）

- 定义：mxn矩阵A的零空间$N(A)$是$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$所有解构成的空间。
  - $N(A)$是$\mathbb{R}^n$的子空间（需要证明在加法和数乘下封闭）
  - $C(A)$是$\mathbb{R}^m$的子空间
- 如果A是可逆的，则$N(A) = \mathrm{Z}$ （只有零向量）
- 如果A没有自由列，则$N(A) = \mathrm{Z}$（ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$只有0解）
- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

  - $N(A)$：$x_1 + 2x_2 = 0$定义的直线

矩阵A的零空间

- 例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

  - $N(A)$：$x_1 + 2x_2 = 0$定义的直线
  - $N(A)$：$\begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $N(A)$： $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$的线性扩张
- 想法： 找到的$N(A)$一组基

约化行阶梯矩阵和$N(A)$的描述

Pivot Variables and Free Variables in the Echelon Matrix R

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p & p & f & p & f \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ \mathbf{0} \\ -e \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

3 pivot columns p
2 free columns f
to be revealed by R

I in pivot columns
F in free columns
3 pivots: rank $r = 3$

special $R\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}$ and $R\boldsymbol{s}_2 = \mathbf{0}$
take $-a$ to $-e$ from R
$R\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$ means $A\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$

R shows clearly: *column* $3 = a\,(\textit{column}\ 1) + b\,(\textit{column}\ 2)$. The same must be true for A.
The special solution $\boldsymbol{s}_1$ repeats that combination so $(-\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}, \mathbf{1}, 0, 0)$ has $R\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{0}$.
Nullspace of $A =$ Nullspace of $R =$ all combinations of $\boldsymbol{s}_1$ and $\boldsymbol{s}_2$.

思考：R的列空间的基？

Figure from Strang, introduction to linear algebra

约化行阶梯矩阵和$N(A)$的描述

- $N(A) = N(R)$
- 方程$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，主列对应的未知数可以用自由列对应的未知数表示
- $N(R)$ 的基
  - 每个自由列给出基中的一个向量$\boldsymbol{x}$，$N(R)$的维数=自由列的数量
  - 自由列j对应的$\boldsymbol{x}$写法如下：$\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{x}$对应其它自由列的分量是0，$\boldsymbol{x}$对应主列i的分量为$\boldsymbol{x}_i = -R_{ij}$
- 另外：自由列可以写成主列的线性组合
  - 所有**主列**构成$C(R)$的**一组基**

矩阵的秩（rank）

- 定义：矩阵A的秩为行空间或者列空间的维数（后面会证明行秩=列秩）
  - 等于约化行阶梯矩阵$R = \mathrm{rref}(A)$的非零行数
  - 等于约化行阶梯矩阵$R = \mathrm{rref}(A)$的主列数
- 例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \text{ all have rank 1.}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \text{ have only one pivot.}$$

Figure from Strang, introduction to linear algebra

小结

- 矩阵A的零空间：mxn矩阵A的零空间$N(A)$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$所有解构成的空间
- 矩阵A的秩：行空间或者列空间的维数（后面会证明行秩=列秩）
  - 等于约化行阶梯矩阵$R = \mathrm{rref}(A)$的非零行数
  - 等于约化行阶梯矩阵$R = \mathrm{rref}(A)$的主列数
- 如果矩阵的列数大于行数，则矩阵一定有自由列，所以对应的零空间非0

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵A的零空间（$Ax = 0$的解空间）
- **方程$\boldsymbol{Ax = b}$的完整解**
- 四个子空间的维度

线性方程组的通解（revisit）

- 零空间：线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的通解
- 考虑线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
  - A是mxn矩阵
- 通解：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n$
  - $\boldsymbol{x}_p$是一个特解
  - $\boldsymbol{x}_n$是A的零空间$N(A)$的任意元素

线性方程组的通解（revisit）

- 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
  - A是mxn矩阵
- 增广矩阵$(A \quad \boldsymbol{b})$，约化行阶梯矩阵为$(R \quad \boldsymbol{d})$
  - **解存在**：R的零行对应$\boldsymbol{d}$的零行

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \boldsymbol{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \boldsymbol{b}_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \boldsymbol{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \boldsymbol{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$$

线性方程组的通解

- 增广矩阵$(A \quad \boldsymbol{b})$，约化行阶梯矩阵为$(R \quad \boldsymbol{d})$
  - 特解：$R\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{d}$
  - 通解：$x_n \in N(A)$， x_n表达成$N(A)$中基的线性组合
- 例：

$$Rx_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性方程组的通解

- 增广矩阵$(A \quad \boldsymbol{b})$，约化行阶梯矩阵为$(R \quad \boldsymbol{d})$
  - 特解：$R\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{d}$
  - $\boldsymbol{x}_p$的一种选取方式：自由列对应的未知数取0。如果主元列i中的1在第j行，则$(\boldsymbol{x}_p)_i = b_j$
- 例：

$$Rx_p = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性方程组的通解

- 例：假设A是一个可逆的方阵，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解？
  - $\mathrm{rref}(A)=I,\quad N(A)=Z$
  - $(A,\boldsymbol{b})=(I,A^{-1}\boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p=A^{-1}\boldsymbol{b}$
- 例：

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\-2&-3\end{bmatrix}\text{ and }\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}1&1&b_1\\1&2&b_2\\-2&-3&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&b_1\\0&1&b_2-b_1\\0&-1&b_3+2b_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2b_1-b_2\\0&1&b_2-b_1\\0&0&\boldsymbol{b_3+b_1+b_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix}2b_1-b_2\\b_2-b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

满列秩（full column rank）矩阵

- 定义：A满列秩，如果秩r=列数n
  - A的所有列都是主列（没有自由列）
  - 零空间$N(A)$只有零向量
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$如果有解，$\boldsymbol{b} \in C(A)$，且只有一个解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ and } \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{b_3 + b_1 + b_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

满行秩（full row rank）矩阵

- 定义：A满行秩，如果秩r=行数m
  - A的所有行都有主元，R没有零行
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$对于任意$\boldsymbol{b}$都有解
  - $C(A) = \mathbb{R}^m$
  - $\dim N(A) = n - r = n - m$，张成$\mathbb{R}^n$内的一个n-m维线性空间

线性方程组解的总结

The four possibilities for linear equations depend on the rank $\boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}$	and	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}$	*Square and invertible*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has 1 solution
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}$	and	$r<n$	*Short and wide*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has ∞ solutions
$r<m$	and	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}$	*Tall and thin*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has 0 or 1 solution
$r<m$	and	$r<n$	*Not full rank*	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	has 0 or ∞ solutions

Four types for $\boldsymbol{R}$	$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Their ranks	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}<\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{r}<\boldsymbol{m}, \boldsymbol{r}<\boldsymbol{n}$

Cases 1 and 2 have full row rank $r=m$. Cases 1 and 3 have full column rank $r=n$. Case 4 is the most general in theory and it is the least common in practice.

Figure from Strang, introduction to linear algebra

小结

- 矩阵的秩=主元个数，约化行阶梯矩阵的零行数量=m-r
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当增广矩阵$(A, \boldsymbol{b})$的最后一列不是主列
- 特解$\boldsymbol{x}_p$的一种选取方式：自由列对应的分量取0。如果主元列i中的1在第j行，则$(\boldsymbol{x}_p)_i = b_j$
- 如果系数矩阵列满秩：无解或者有唯一解
- 如果系数矩阵行满秩：有唯一解或者有无穷多解

内容提要

- 向量空间
- 线性独立、基和维度
- 矩阵A的零空间（$Ax = 0$的解空间）
- 方程$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的完整解
- **四个子空间的维度**

四个同矩阵A有关的线性子空间

- mxn矩阵A
  - 行空间$C(A^T)$：所有行向量的线性扩张，$\mathbb{R}^n$的子空间
  - 列空间$C(A)$ ：所有列向量的线性扩张， $\mathbb{R}^m$的子空间
  - 零空间$N(A)$ ：$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解构成的线性空间， $\mathbb{R}^n$的子空间
  - 左零空间（left null space） $N(A^T)$ ： $\boldsymbol{x}^T A = \mathbf{0}$的解构成的线性空间， $\mathbb{R}^m$的子空间
- 维度（线性代数基本定理）：
  - $C(A^T)$和$C(A)$的维度都等于A的秩r（行秩=列秩）
  - $N(A)$的维度等于n-r
  - $N(A^T)$的维度等于m-r

行变换和列变换（矩阵的初等变换）

- 行变换：用初等矩阵左乘矩阵A
  - 倍加矩阵： $I + ae_{ij}$
  - 置换矩阵： $I + e_{ij} + e_{ji} - e_{ii} - e_{jj}$
  - 倍乘矩阵： $I + (c-1)e_{ii}$
- 列变换：用初等矩阵右乘矩阵A
  - $A(I + ae_{ij})$： A的第i列乘a再加到第j列
  - $A(I + e_{ij} + e_{ji} - e_{ii} - e_{jj})$： 交换$A$的第i列和第j列
  - $A(I + (c-1)e_{ii})$： A的第i列乘非零常数c

行变换和子空间

- 假设E是一系列行变换对应的矩阵， E可逆
- A和EA有相同的零空间
  - $N(A) = N(EA)$
  - 证明思路：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解是$EA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解，反之也成立
- A和EA列空间的维度相同（列空间不一定一样！！！）
  - $\dim C(A) = \dim C(EA)$
  - 证明思路：假设$\{\boldsymbol{v}_i\}$是$C(A)$的一组基，证明$\{E\boldsymbol{v}_i\}$是$C(EA)$的一组基。

列变换和子空间

- 假设E是一系列列变换对应的矩阵， E可逆
- A和AE有相同的零空间维度
  - $\dim N(A) = \dim N(AE)$
  - 证明思路：$\boldsymbol{x}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解，那么$E^{-1}\boldsymbol{x}$就是$AE\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解，假设$\{\boldsymbol{v}_i\}$是$N(A)$的一组基，证明$\{E^{-1}\boldsymbol{v}_i\}$是$N(AE)$的一组基
- A和AE 有相同的列空间
  - $C(A) = C(AE)$
  - 证明思路：AE的每一列是A的列向量的线性组合（矩阵乘法的第二种观点），又因为$A = (AE)E^{-1}$，A的每一列也是AE的列向量的线性组合

矩阵A的子空间在初等变换下的性质

- 矩阵A在初等变换下
  - 列空间$C(A)$的维度不变
  - 零空间$N(A)$的维度不变
- 行变换下
  - 零空间$N(A)$不变
- 列变换下
  - 列空间$C(A)$不变
- 矩阵A^T的子空间在初等变换下如何？

矩阵和初等变换

- 矩阵A可以通过初等行变换化成约化行阶梯形式$R = \mathrm{rref}(A)$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- R可以通过列变换变成矩阵$\tilde{I}$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于矩阵$\tilde{I}$：行秩（$\dim C(\tilde{I}^T)$）=列秩（$\dim C(\tilde{I})$）=r，$\dim C(\tilde{I}) + \dim N(\tilde{I}) = n$，$\dim C(\tilde{I}^T) + \dim N(\tilde{I}^T) = m$

矩阵和初等变换

- 矩阵A可以通过行变换+列变换变成矩阵$\tilde{I}$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于矩阵$\tilde{I}$：行秩（$\dim C(\tilde{I}^T)$）=列秩（$\dim C(\tilde{I})$）=r，$\dim C(\tilde{I}) + \dim N(\tilde{I}) = n$，$\dim C(\tilde{I}^T) + \dim N(\tilde{I}^T) = m$
- 以上的这些量在初等变化下都不变，所以：
- **线性代数基本定理（第一部分）**：

行秩（$\dim C(A^T)$）=列秩（$\dim C(A)$）=r，$\dim C(A^T) + \dim N(A) = n$，$\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$

可逆矩阵的判断

- 矩阵A可以通过行变换+列变换变成矩阵$\tilde{I}$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 如果A是n阶方阵，且$\mathrm{rank}(A) = n$，则A可以通过行变换变成单位矩阵：$E_i \cdots E_1 A = I$
  - 因为初等矩阵和单位矩阵可逆，所以A也可逆
- **定理**：方阵A可逆当且仅当A满秩

线性代数基本定理（第一部分）

- 行秩=列秩

$$\dim C(A^T)=\dim C(A)=r$$

- $\dim C(A^T)+\dim N(A)=r+\dim N(A)=n$
- $\dim C(A)+\dim N(A^T)=r+\dim N(A^T)=m$

矩阵的四个子空间

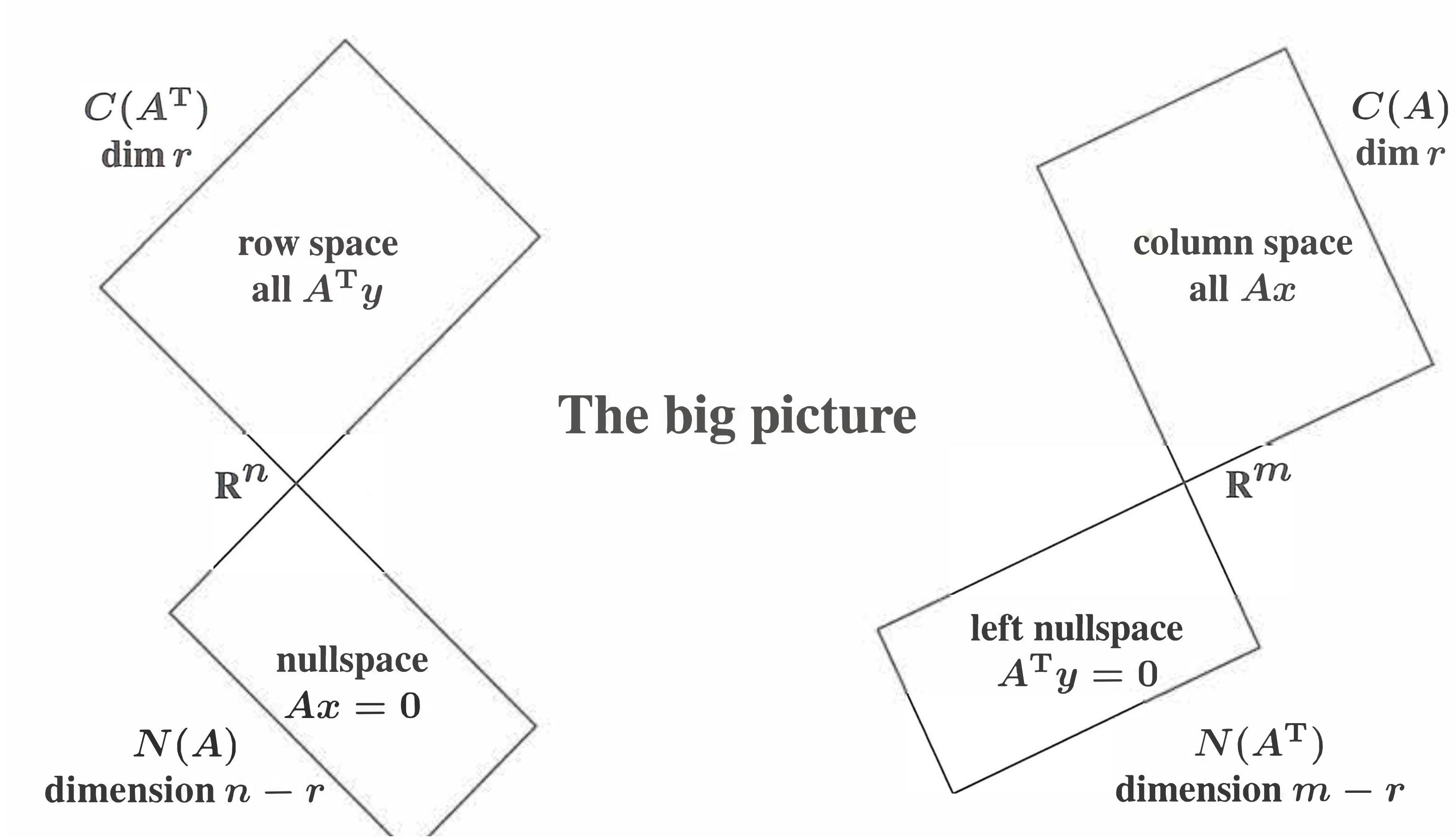

Figure from Strang, introduction to linear algebra

小结

- 行秩=列秩

$$\dim C(A^T) = \dim C(A) = r$$

- $\dim C(A^T) + \dim N(A) = \dim C(A) + \dim N(A) = r + \dim N(A) = n$
- $\dim C(A) + \dim N(A^T) = \dim C(A^T) + \dim N(A^T) = r + \dim N(A^T) = m$